V-17 (0 h, 24 min) 19-Abril-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Integrales en el plano complejo** **Parte Principal**

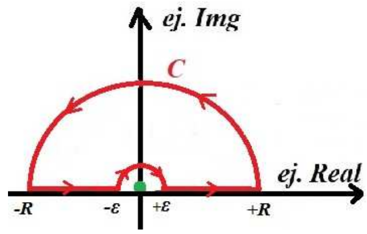
Si **se integra un función *f(z)* a lo largo de una línea del plano complejo**, pero hay algún punto de esa línea donde la función no existe (polo), entonces se evita dicho punto, dándole un pequeño rodeo de radio $\varepsilon \to 0$, y obteniendo un resultado que llamamos **PARTE PRINCIPAL de la integral**

Sea una línea que va desde z = -∞ a z = +∞ (si es el eje real, se cambia "z" por "x") y una función f(z) que queremos integrar a lo largo de ella, pero hay un punto ***z_0 / $f(z_0)$ no existe*** ,la parte principal podemos poner que es:

$$\wp \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} f(z)dz\right] \qquad \textbf{(I)}$$

1º EJEMPLO: Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z}dz$ con z variando en el eje real (también podría variar en el eje imaginario)

En $z = 0$, $\frac{1}{z} \to \infty$ luego la integral exacta no existe. No obstante, de cara a asignarle un valor a su parte principal, consideramos la integral en el contorno cerrado C de la figura, en el que se elude el punto z = 0 y, por lo tanto resulta nula: $\oint \frac{1}{z}dz = 0$



Por otro lado, podemos poner esa integral por trozos:

$$\oint \frac{1}{z}dz \;=\; 0 \;=\; \oint_{R}^{-R} \frac{1}{z}dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{z}dz + \oint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{z}dz + \int_{+\varepsilon}^{+R} \frac{1}{z}dz$$

La integral en el trozos curvo de radio R la hacemos parametrizando $z = R\cdot e^{i\theta}$

$\oint_{+R}^{-R} \frac{1}{z}dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} i\,d\theta = +i\pi$ resultado válido para cualquier valor de R, *incluso para $R\to\infty$*

La integral en el trozos curvo de radio ε la hacemos parametrizando $z = \varepsilon\cdot e^{i\theta}$

$\oint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{z}dz = \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}d\theta = \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} i\,d\theta = -i\pi$ resultado válido para cualquier valor de ε *incluso para $\varepsilon\to 0$*

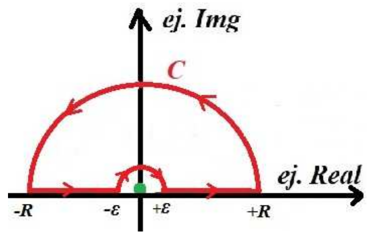
La suma de las anteriores integrales a lo largo de los trozos curvos se anula. Además podemos considerar $R\to\infty$ y poner:

$$0 \;=\; \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{z}dz + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{z}dz \quad\Longrightarrow\quad \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}dx\right] = 0$$

Hemos sustituido "z" por "x", ya que el complejo "z" varia por el eje real. Además el resultado de la parte principal de esa integral: $\wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = 0$ es coherente con el hecho de que es una función impar y, aunque hagamos un salto en $z = 0$, la integral para los valores negativos de x se anula con la integral para los positivos.

2º EJEMPLO: Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}dz$ con z variando en el eje real

Igual que en el ejemplo anterior en $z = 0$, $\frac{1}{z} \to \infty$. Pero para obtener la parte principal consideramos la integral en el contorno cerrado C de la figura, en el que se elude el punto z = 0 y, por lo tanto resulta nula: $\oint \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$



Por otro lado, igual que antes, ponemos esa integral por trozos:

$$\oint \frac{e^{iz}}{z}dz \;=\; 0 \;=\; \oint_{R}^{-R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \oint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{+\varepsilon}^{+R} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

La integral en el trozos curvo de radio R la hacemos parametrizando $z = R\cdot e^{i\theta}$

$$\oint_{+R}^{-R} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{e^{\,iR(\cos\theta+i\,sen\,\theta)}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta}d\theta = i\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{\,iR(\cos\theta+i\,sen\,\theta)}\,d\theta = i\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{\,iR\cos\theta}e^{-R\,sen\,\theta}\,d\theta =$$

$$= i\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}[\cos(R\cos\theta) + i sen\,(R\cos\theta)]\; e^{-R\,sen\,\theta}\,d\theta$$

Si hacemos que $R\to\infty$ el factor dentro del corchete está acotado por grande que sea R, pero el otro factor exponencial tiende a cero, ya que *sen θ* es positivo entre 0 y π. Por lo tanto, $\lim_{R\to\infty} \oint_{+R}^{-R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$.

La integral en el trozos curvo de radio ε la hacemos parametrizando $z = \varepsilon \cdot e^{i\theta}$

$\oint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{e^{i\varepsilon(\cos\theta + i\, sen\, \theta)}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} e^{i\varepsilon(\cos\theta + i\, sen\,\theta)}\, d\theta$ Cuando $\varepsilon \to 0$ la exponencial tiende a 1

Por lo tanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} \oint_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} d\theta = -i\,\pi$

Este último resultado se obtiene también con una **extensión de la fórmula integral de Cauchy**: cuando el rodeo al polo no es completo (2π rad) y es parcial (α rad) en dicha fórmula, en vez de $2\pi i/n!$ aparecerá $\alpha i/n!$ (en este ejemplo sería $\pi i/n!$) . **Esta extensión solamente es válida si el “rodeo” al polo es de radio ε infinitesimal**

Retomamos de nuevo todo el recorrido cerrado C. Teniendo en cuenta que hacemos el radio infinito y que sustituimos “z” por “x”, ya que el complejo “z” varia por el eje real. podemos deducir la parte principal que buscamos:

$$0 \;=\; 0 + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx - i\,\pi + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \quad \Longrightarrow \quad \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \; i\,\pi$$

La P principal de la integral buscada es:

$$\wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \qquad \textbf{(I)}$$

De ese resultado podemos extraer otro:

$$\wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi \;\; \rightarrow \;\; \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i\, sen\, x}{x} dx = \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \wp \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{sen\, x}{x} dx = i\pi$$

La función $\frac{\cos x}{x}$ es impar [f(-x) = −f(x)], luego su integral a lo largo de todo el eje X debe ser nula $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$
En cambio la función $\frac{sen\, x}{x}$ es par y su integral no será nula. Por lo tanto podemos poner:

$$\wp \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{sen\, x}{x} dx = i\pi \quad \Longrightarrow \qquad \wp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\, x}{x} dx = \pi \qquad \textbf{(II)}$$

EJERCICIO: **Calcular la P.Principal de:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\, x}{x(x^2+1)} dx$$